PASSEIOS ALEATÓRIOS E CIRCUITOS ELÉTRICOS

Aluno: Ricardo Fernando Paes Tiecher
Orientador: Lorenzo Justiniano Díaz Casado

Introdução

A teoria da probabilidade, assim como grande parte da matemática, está intimamente relacionada à física como solução de problemas e intuição para resolução de diversos questionamentos. Neste projeto, analisamos a ação combinada entre física e matemática em termos da correlação entre passeios aleatórios e circuitos elétricos. Para isso, é de importância central considerar o teorema de Pólya, o qual afirma que um passeio aleatório em uma rede infinita num espaço de dimensão **d** está indubtavelmente fadado a retornar ao ponto inicial quando **d = 2**, todavia possui probabilidade positiva de escapar para o infinito sem retornar ao ponto inicial quando **d = 3**.

O intuito do projeto é interpretar este teorema como uma afirmação sobre circuitos elétricos, e então visualizá-lo usando de técnicas da teoria clássica da eletricidade e de conhecimento anterior.

Inicialmente nos restringimos ao estudo de passeios aleatórios em redes finitas. Aqui estabelecemos a conexão entre os conceitos de corrente elétrica e voltagem e passeios aleatórios descritivos correspondentes observados como cadeias de Markov **[1]**.

Em seguida, consideramos passeios aleatórios em redes infinitas. Discutimos então passeios em grafos infinitos mais gerais, e a partir do método de Rayleigh derivamos certas expressões do teorema de Pólya **[2]**.

Passeios aleatórios em uma dimensão

O conceito de passeio aleatório foi um dos primeiros a ser estudado na teoria da probabilidade, pois constitui um papel importante em algumas das suas principais aplicações. Um exemplo de um passeio aleatório pode ser descrito como se segue.

Um homem caminha por uma avenida com 5 quadras. Ele começa na quadra **x** e, com probabilidade _ segue uma quadra para a direita, com probabilidade _ segue uma quadra para a esquerda; ao chegar na esquina seguinte, ele mais uma vez escolhe aleatoriamente sua direção ao longo da avenida. O indivíduo continua até chegar a esquina 5 ou 0, permanecendo indefinidamente naquela que primeiro alcançar.

O problema a ser resolvido é encontrar a probabilidade **p(x)** de que o homem, começando na esquina **x**, chegue em 5 antes de alcançar 0. Analisamos a seguir a mesma situação, todavia descrita de maneira geral de modo a englobar todo e qualquer passeio aleatório em uma dimensão (avenida).

Considere um passeio aleatório nos inteiros 1, 2, 3, ..., **N**. Seja **p(x)** a probabilidade, começando em **x**, de alcançar **N** antes de 0. Analisamos **p(x)** como uma função definida nos pontos **x = 0, 1, 2, ..., N**. A função **p(x)** tem as seguintes propriedades:

(a) p(0) = 0;

(b) p(N) = 1;

(c) p(x) = _ p(x-1) + _ p(x+1) para x = 1, 2, ..., N-1.

As propriedades explicitadas decorrem dos conceitos anteriormente registrados e da teoria da probabilidade condicional. Utilizando-as, determinamos um conjunto de **N-1** equações lineares cuja solução única é **p(x) = x/N**.

Considere agora o seguinte problema, aparentemente distinto do anterior. Sejam **N** resistores iguais conectados em série e uma voltagem unitária ligada aos extremos como na *Figura 1*. Voltagens **v(x)** são estabelecidas nos pontos **x = 0, 1, 2, ..., N**. Aterramos o ponto **x = 0** para que **v(0) = 0** e **v(N) = 1**. A questão a ser respondida é qual a voltagem **v(x)** nos pontos **x** entre os resistores. Pelas Leis de Kirchhoff e Lei de Ohm encontramos **v(x) = _ v(x+1) + _ v(x-1)** e, mais uma vez, resolvendo equações lineares, determinamos que **v(x) = x/N**.

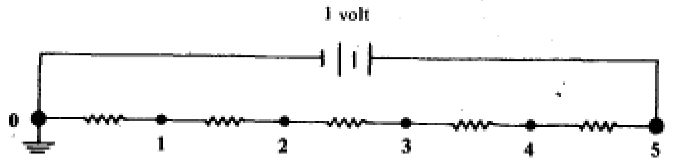

Figura 1

Sabemos que **p(x)** e **v(x)** são funções harmônicas em **S = {0, 1, 2, ..., N}** com os mesmos valores de fronteira **p(0) = v(0) = 0** e **p(N) = v(N) = 1**. Encontrar explicitamente uma função harmônica que satisfaça tais condições é chamado problema de Dirichlet. Nesse sentido, pelo princípio da unicidade para o problema de Dirichlet, não podem haver duas diferentes funções harmônicas satisfazendo as mesmas condições de fronteira. Portanto, **p(x) = v(x)** pois apenas **x/N** satisfaz as condições impostas pelas duas. Isso significa que basta resolver uma das situações descritas e a mesma solução se aplica ao problema semelhante no outra campo.

Passeios aleatórios em duas dimensões

Olhamos agora para o caso mais complicado de um passeio aleatório em duas dimensões. A *Figura 2* ilustra um exemplo. Nesse caso, desejamos encontrar a probabilidade de, começando em um ponto interior **x**, alcançar um ponto de fronteira **E** antes de um ponto de fronteira **P**. O passeio acontece por meio de cada ponto **x = (a, b)** para cada uma de suas quatro vizinhanças **(a+1, b)**, **(a-1, b)**, **(a, b+1)**, **(a, b-1)** com probabilidade _. Chegando em um ponto de fronteira ele permanecerá neste, como previsto.

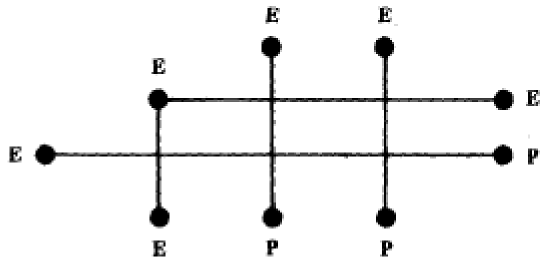

Figura 2

O problema correspondente no campo da eletricidade é o mostrado na *Figura 3*. Os pontos **P** estão aterrados e os pontos **E** conectados e fixados em uma voltagem unitária por uma bateria de 1V. Perguntamos novamente pela voltagem **v(x)** nos pontos interiores.

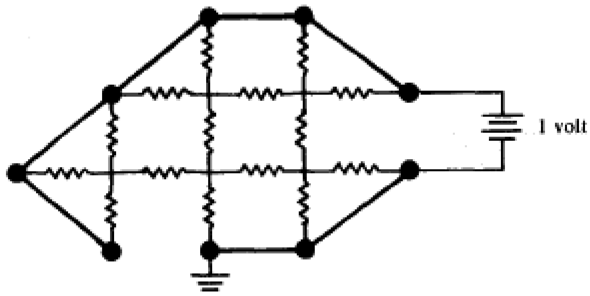

Figura 3

Definindo funções harmônicas em duas dimensões e adaptando as propriedades unidimensionais ao novo conceito no campo bidimensional, conseguimos mais uma vez verificar que a função que satisfaz os dois problemas e a mesma e, portanto, basta encontrar a solução para um deles. Entretanto, encontrar a solução exata para o problema de Dirichlet em duas dimensões não é tarefa fácil, então antes de resolvê-lo consideramos dois métodos para gerar soluções aproximadas.

O primeiro deles, chamado **método de Monte Carlo**, corresponde a realizar diversos passeios aleatórios em **x** e encontrar a média final do resultado desses. Pela lei das médias (lei dos grandes números na teoria da probabilidade), a estimativa que obtemos se aproxima do valor esperado final. A seguir (*Figura 4*) apresentamos a estimativa obtida após 10.000 passeios aleatórios a partir de cada ponto interior, aproximando o valor final para cada **x**. Quando obtivermos a solução exata para a situação, calcularemos o erro da aproximação do método e veremos que, apesar de não ser o método mais eficiente, oferece estimativa relevante.

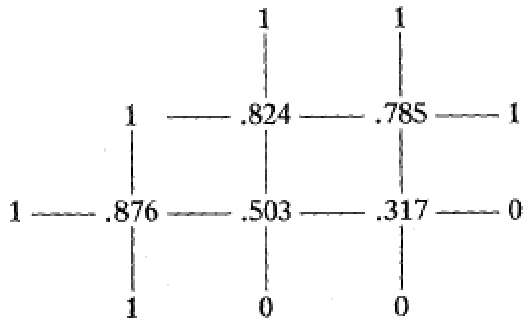

Figura 4

O **método da flexibilização** corresponde a "escolher" uma função tendo valores de fronteira específicos e valores aleatórios no interior e "ajustar" o valor destes para a média dos vizinhos. Executando a mesma operação para os outros pontos interiores, a função resultante, se não é harmônica, pelo menos é aproximadamente harmônica (mais do que aquela com a qual começamos). Repetindo o processo inúmeras vezes, nos aproximaremos mais e mais da solução do problema de Dirichlet. A seguir (*Figura 5*) expomos os resultados encontrados para o exemplo citado após um número de iterações o suficiente para encontrarmos valores com a terceira casa decimal fixa (isto ocorre nas iterações 8 e 9). Veremos que esses resultados estão mais próximos da solução final do que aqueles determinados pelo método anteriror.

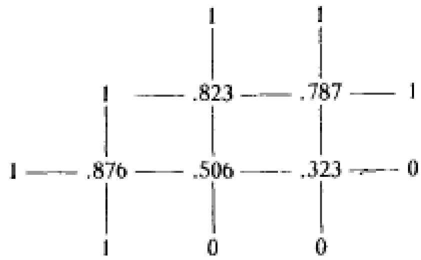

Figura 5

Resolvemos agora o problema de Dirichlet bidimensional utilizando sistema de equações lineares. Encontraremos a solução do exemplo ilustrado para demonstrar as operações e a *Figura 6* expõe mais uma vez o modelo, agora com os pontos interiores nomeados **a**, **b**, **c**, **d**, **e**. Basta reescrever as equações lineares que descrevem o sistema na forma matricial e, após algum algebrismo e uma inversão matricial, encontrar a solução $\mathbf{x}$ = $(\mathbf{x_a}\ \mathbf{x_b}\ \mathbf{x_c}\ \mathbf{x_d}\ \mathbf{x_e})$ = **(0,823 0,787 0,876 0,506 0,323)**. Para efeito de comparação, as soluções aproximadas encontradas anteriormente são, respectivamente, $\mathbf{x}_{\mathbf{Monte\ Carlo}}$ = **(0,824 0,785 0,876 0,503 0,317)** e $\mathbf{x}_{\mathbf{flexibiliza\c{c}\tilde{a}o}}$ = **(0,823 0,787 0,876 0,506 0,323)**. Vemos que as aproximações do método de Monte Carlo foram relativamente boas, com erro menor do que 0,01 e aquelas do método da flexibilização foram ótimas, com erro quase não identificável. Devido a falta de praticidade e simplicidade do cálculo exato usando os sistemas lineares, vemos que os métodos de aproximação se mostram de grande relevância na determinação de um passeio aleatório bidimensional.

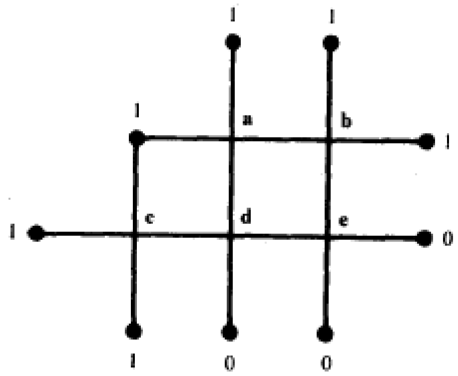

Figura 6

Passeios aleatórios em redes mais gerais

Introduzimos agora redes mais gerais e a interpretação de um passeio aleatório nas referidas estruturas. Seja G um grafo conexo e suponha uma resistência $\mathbf{R_{xy}}$ para cada aresta **xy**. A condutância da aresta **xy** é $\mathbf{C_{xy} = 1/R_{xy}}$. Definimos um passeio aleatório em G como uma cadeia de Markov com matrix de transição **P** dada por $\mathbf{P_{xy} = C_{xy}/C_x}$, onde $\mathbf{C_x} = \sum \mathbf{C_{xy}}$. Quando todas as condutâncias de um circuito são iguais, o passeio aleatório num grafo G associado tem a propriedade de , para cada ponto, ter probabilidade semelhante de se mover para cada um de seus vizinhos. A esse passeio aleatório nois referimos como **passeio aleatório simples** em G. Todos os nossos exemplos citados até agora correspondem a passeios aleatórios simples.

Faz-se de extrema importância delinear a interpretação probabilística de voltagem e corrente em um circuito elétrico geral. Para isso, utilizamos de conceitos atrelados a eletricidade, como as Leis de Kirchhoff e a Lei de Ohm e aplicação de cadeias de Markov e funções harmônicas, da mesma maneira que nos argumentos anteriores. Em suma, quando uma voltagem unitária é aplicada entre **a** e **b**, sendo $\mathbf{v_a = 1}$ e $\mathbf{v_b = 0}$, a voltagem $\mathbf{v_x}$ em qualquer ponto **x** representa a probabilidade de um passeio iniciado em **x** retornar a **a** antes de alcançar **b**. No caso da corrente elétrica, quando uma corrente unitária segue de **b** para **a**, a corrente $\mathbf{i_{xy}}$ circulando pelo ramo conectando **x** a **y** é igual ao número esperado de vezes que um passeio, iniciado em **a** até alcançar **b**, percorrerá o ramo de **x** a **y**. O valor dessas correntes é proporcional ao valor da corrente formada quando uma voltagem unitária e conectada entre **a** e **b**, a constante de proporcionalidade sendo a resistência efetiva do circuito ($\mathbf{R_{EFF}}$).

Quando impomos uma voltagem **v** entre os pontos **a** e **b**, uma voltagem $\mathbf{v_a = v}$ é estabelecida em **a** e $\mathbf{v_b = 0}$, e uma corrente $\mathbf{i_a = \sum i_{ax}}$ seguirá no circuito proveniente de uma fonte externa. A quantidade de corrente depende da resistência total do circuito. Definimos a resistência efetiva $\mathbf{R_{EFF}}$ entre **a** e **b** como $\mathbf{R_{EFF} = v_a/i_a}$. A quantidade recíproca $\mathbf{C_{EFF} = 1/R_{EFF}}$ é a condutância efetiva. Podemos interpretar a condutância efetiva como uma probabilidade de escape. Quando $\mathbf{v_a = 1}$, a condutância efetiva se iguala a corrente ia circulando para **a**. Essa corrente $\mathbf{i_a = \sum (v_a - v_y)C_{ay} = C_a p_{escape}}$ onde $\mathbf{p_{escape}}$ é a probabilidade de, iniciado em **a**, o passeio alcançar **b** antes de retornar a **a**. Então $\mathbf{p_{escape} = C_{EFF}/C_a}$.

Lei da monotonicidade de Rayleigh

Segundo Rayleigh, se o valor das resistências de um circuito é aumentado, a resistência efetiva $\mathbf{R_{EFF}}$ entre dois quaisquer pontos pode apenas aumentar. Se o valor for reduzido, pode apenas diminuir.

A prova dessa lei é simples. Considere **i** a corrente unitária circulando de **a** para **b** com resistores $\mathbf{R_{xy}}$. Seja **j** a corrente unitária seguindo de **a** para **b** com resistores $\mathbf{R_{xy}^*}$ onde $\mathbf{R_{xy}^* > R_{xy}}$. Então $\mathbf{R_{EFF}^* = \_\ \sum j_{xy}^2 R_{xy}^* \geq \_\ \sum j_{xy} R_{xy}}$. Mas como **j** é corrente unitária entre **a** e **b**, sabemos por dissipação de energia que $\mathbf{\_\ \sum j_{xy}^2 R_{xy} \geq \_\ \sum i_{xy}^2 R_{xy} = R_{EFF}}$. Portanto $\mathbf{R_{EFF}^* \geq R_{EFF}}$. A prova para o caso de valores de resistências decrescentes é análogo.

Problema da recorrência de Pólya

Em 1921 George Pólya investigou o comportamento de passeios aleatórios em certos grafos infinitos. Os grafos considerados por ele, aos quais nos referimos como **treliças**, são ilustrados na *Figura 7*. Denotaremos por $\mathbf{Z^d}$ a treliça **d**-dimensional, com origem **0 = (0, 0, 0, ..., 0)**. Agora considere um ponto caminhando aleatoriamente nessa treliça. Isso significa, como anteriormente, que ao alcançar um vértice do grafo, a probabilidade de seguir para qualquer uma das **2d** arestas vizinhas ao vértice é **1/2d**. Chamaremos esse passeio aleatório de **passeio aleatório simples em d dimensões**.

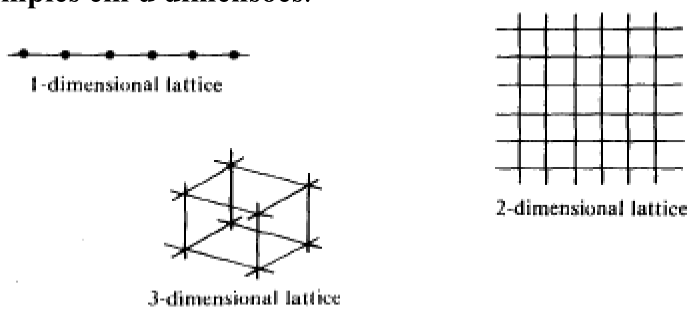

Figura 7

A questão proposta por Pólya foi a determinar se o retorno do ponto que caminha pelo grafo ao vértice de início do passeio é inevitável. Se denotarmos a probabilidade do ponto nunca retornar ao vértice de início de $\mathbf{p_{escape}}$, então o passeio aleatório é **recorrente** se $\mathbf{p_{escape} = 0}$ ou **transiente** se $\mathbf{p_{escape} > 0}$. Chamamos o problema de determinar a recorrência ou a transiência de um passeio aleatório de problema do tipo.

Segundo o **teorema de Pólya**, um passeio aleatório simples em uma treliça de dimensão **d** é recorrente se **d = 1, 2** e transiente se **d > 2**.

Podemos determinar o tipo de uma treliça infinita pelas propriedades de grafos finitos crescentes em tamanho que estão contidos na primeira. Dessa maneira, a partir de uma análise que exige geometria e definições específicas de distâncias, chegamos a seguinte conclusão: considerando $\mathbf{p^r}_{\mathbf{escape}}$ a probabilidade de um passeio aleatório em $\mathbf{G^r}$ (grafo criado a partir de $\mathbf{Z^d}$ retirando vértices distantes da origem de um valor maior do que **r**), iniciado em **0**, alcançar $\mathbf{S^r}$ (pontos distantes exatamente **r** da origem) antes de retornar a ela, então $\mathbf{p_{escape}} = \mathbf{\lim_{r \to \infty}}$ $\mathbf{p^r}_{\mathbf{escape}}$ é a probabilidade de escape para o grafo infinito. Se esse limite for 0, então o passeio infinito é recorrente. Se for maior do que 0, então o passeio é transiente. Veja um exemplo na *Figura 8*.

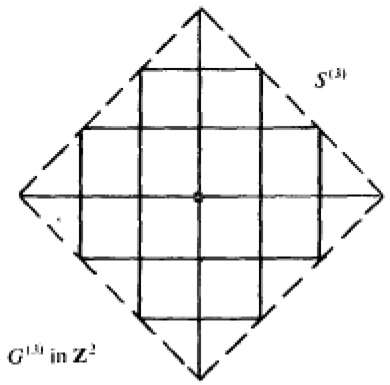

Figura 8

Para determinar $\mathbf{p^r}_{\mathbf{escape}}$ pela formulação da eletricidade, basta aterrar todos os pontos de $\mathbf{S^r}$, mantendo **0** em 1V, e medir a corrente circulando pelo circuito. Dessa maneira, concluímos após algum algebrismo e aplicações de eletricidade, que $\mathbf{p_{escape}} = \mathbf{1/2dR_{EFF}}$, ou seja, o passeio é recorrente se e somente se a resistência efetiva do circuito vai ao infinito no infinito, caso no qual $\mathbf{p_{escape}} = \mathbf{0}$. Veja o exemplo na *Figura 9*.

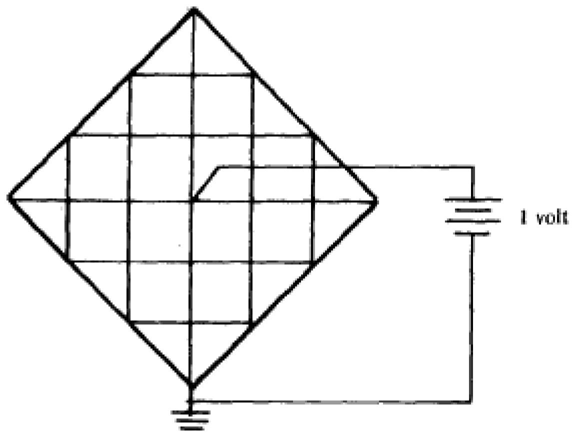

Figura 9

As provas para o teorema de Pólya são inúmeras e vão desde a interpretação probabilística do processo até a observação baseada nos conceitos e leis da eletricidade. Para maiores detalhes, veja **[2]**.

Passeios aleatórios em circuitos infinitos

Seja (G, **C**) uma rede infinita com passeio aleatório **P**. Considere **0** um ponto de referência. Seja $\mathbf{p_{escape}}$ a probabilidade de que um passeio iniciado em **0** nunca retorne a **0**. Se $\mathbf{p_{escape}} = \mathbf{0}$ dizemos que **P** é recorrente, e se $\mathbf{p_{escape}} > \mathbf{0}$ dizemos que **P** é transiente. Mostramos anteriormente que o problema do tipo é equivalente a um problema de circuitos elétricos demonstrando que um passeio aleatório simples numa treliça é recorrente se e somente se a treliça tem resistência efetiva infinita no infinito. Os mesmos argumentos se aplicam, com pequenas modificações e adaptações, ao caso de redes infinitas mais gerais. Isso significa que podemos utilizar os mesmos métodos para determinar o tipo desses passeios, como o método de Rayleigh.

Conclusões

Inicialmente nos restringimos ao estudo de passeios aleatórios em redes finitas. Aqui estabelecemos a conexão entre os conceitos de corrente e voltagem no campo da eletricidade com as quantidades correspondentes nos passeios aleatórios observados como cadeias de Markov.

Em seguida, consideramos passeios aleatórios em redes infinitas. Em relação ao teorema de Pólya e o problema em questão, acumula-se uma bagagem de truques, conhecidos coletivamente como "método de Rayleigh", cuja expectativa é a de que possibilite a determinação de praticamente qualquer passeio aleatório que possa ser apresentado.

Faz-se de extrema importância ressaltar o importante papel das considerações envolvendo o conceito de energia. Atualmente, devido a suas aplicações, esse é considerado talvez a mais importante teoria de toda a física. Refraseando nossos problemas probabilísticos em termos físicos, fomos naturalmente levados a considerações envolvendo energia, e essas nos indicaram o caminho correto por meio das dificuldades de nossas definições.

O estudo teórico permitiu um maior entendimento da estreita relação entre certos questionamentos matemáticos e termos da física, possibilitando estabelecer métodos e formas de raciocínio que direcionassem às respostas dessas questões. Nesse sentido, é inquestionável o avanço no sentido da compreensão e familiaridade com conceitos envolvendo a respectiva interdisciplinaridade.

Referências

1 - ROSS, Sheldon. **A first course in probability.** 7.ed. Prentice Hall, 2005. 576p.

2 - DOYLE, Peter G. **Random walks and electric networks.** The Carus Mathematical Monographs, no.22. 2.ed. Mathematical Association of America, 1984. 159p.